E.N.S.I. PHYSIQUE & MECANIQUE 1982

Programme P **PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

DURÉE : 4 heures

N. B. — Dans tout le problème, x désigne une variable réelle.

I

1° On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{sh}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } x \in \left]-\infty, -\frac{\pi}{6}\right[\\ 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \\ -2\,\mathrm{sh}\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) & \text{si } x \in \left]\frac{5\pi}{6}, +\infty\right[. \end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier l'existence, sur $\mathbb{R}$, des dérivées première et seconde de f et calculer, si elles existent, ces dérivées que l'on notera respectivement f' et f''.

c. Étudier les variations de f et construire la courbe représentative (c_f) de cette fonction en précisant, en particulier, les symétries éventuelles et les branches infinies.

d. Déterminer un entier n tel que f admette, au voisinage de $x = -\frac{\pi}{6}$ d'une part et de $x = \frac{5\pi}{6}$ de l'autre, un développement limité à l'ordre n et n'en admette pas à l'ordre $(n+1)$. Écrire, dans les deux cas considérés, ce développement limité.

2° *a.* Soit $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Construire la courbe représentative (c_g) de la fonction g que l'on suppose définie sur l'intervalle $\left[\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2}\right]$, et sur cet intervalle seulement, par $g(x) = \sigma \cos(x - \varphi)$. Calculer, en particulier, la dérivée à droite de g au point $\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ et la dérivée à gauche de g au point $\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$.

b. Exprimer, en fonction de σ et de φ, les réels φ_0, k_0, φ_1, k_1 pour que la fonction G définie par :

$$G(x) = \begin{cases} k_0\,\mathrm{sh}\,(x + \varphi_0) & \text{si } x \in \left]-\infty, \varphi - \frac{\pi}{2}\right[\\ g(x) & \text{si } x \in \left[\varphi - \frac{\pi}{2}, \varphi + \frac{\pi}{2}\right] \\ k_1\,\mathrm{sh}\,(x + \varphi_1) & \text{si } x \in \left]\varphi + \frac{\pi}{2}, +\infty\right[\end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que G admet une dérivée seconde, que l'on notera G'', continue sur $\mathbb{R}$; vérifier que $G'' + |G|$ garde sur $\mathbb{R}$ une valeur constante que l'on déterminera. Tracer alors sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions G et G''.

.../...

II

Soient λ un réel quelconque, a et b deux réels strictement positifs, ρ et θ respectivement définis par :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \text{Arc tg } \frac{b}{a}.$$

1° y étant une fonction réelle, deux fois dérivable, de la variable x, on considère l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \qquad y'' + \lambda y = 0.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions satisfaisant, sur $\mathbb{R}$, à (E_λ).

2° *a.* On considère le cas où $\lambda = 1$; déterminer la solution y_1 de (E_1) vérifiant les conditions :

$$y_1(0) = a, \qquad y'_1(0) = b.$$

Exprimer, en fonction de θ, les solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad y_1(x) = 0.$$

b. On considère le cas où $\lambda = -1$; déterminer les solutions y^*_{-1} et y^{**}_{-1} de (E_{-1}) respectivement définies par les conditions :

$$y^*_{-1}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'^*_{-1}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\rho \qquad \text{d'une part,}$$

$$y^{**}_{-1}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'^{**}_{-1}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \rho \qquad \text{d'autre part,}$$

puis déterminer, sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des zéros de ces deux fonctions.

3° Soient ψ_1, ψ_2, ψ_3 trois fonctions respectivement définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\psi_1(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x \in \left[\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\psi_2(x) = \begin{cases} y^*_{-1}(x) & \text{si } x \in \left]\theta + \frac{\pi}{2}, +\infty\right[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\psi_3(x) = \begin{cases} y^{**}_{-1}(x) & \text{si } x \in \left]-\infty, \theta - \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\psi(x) = \lambda_1 \psi_1(x) + \lambda_2 \psi_2(x) + \lambda_3 \psi_3(x) \qquad \text{et} \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a. Montrer que $(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b. $(\mathcal{E})$ est-il de dimension finie ? Si oui, préciser cette dimension.

c. Montrer que l'ensemble $(\mathcal{E}^*)$ formé des fonctions de $(\mathcal{E})$ dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{E})$. Déterminer sa dimension.

.../...

III

1° On se propose de montrer que l'équation différentielle :

$$(E^*) \quad y'' + |y| = 0$$

possède une solution h qui est définie sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie les conditions $h(0) = a$, $h'(0) = b$, où a et b ont été précisés en II.

a. Démontrer que si une telle solution existe, il existe aussi $\alpha < 0$ et $\beta > 0$ tels que $h(x)$ soit strictement positif pour tout x tel que $\alpha < x < \beta$.

b. Déterminer h^* satisfaisant à $h^*(0) = a$, $h'^*(0) = b$ et vérifiant (E*) sur $\left]\theta - \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{\pi}{2}\right[$, où θ a été défini en II.

c. Déduire des résultats précédents l'existence de h.

2° On considère la fonction s définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$s(x) = s_1 e^x + s_2 e^{-x},$$

où s_1 et s_2 désignent deux constantes réelles. Déterminer un système de conditions nécessaires et suffisantes vérifiées par s_1 et s_2 d'une part, $s(0)$ et $s'(0)$ d'autre part, pour que s soit solution de (E*) sur $\mathbb{R}$; dans ce cas résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = 0$.

3° *a.* Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; déterminer un système de conditions nécessaires et suffisantes vérifiées par les réels t_1 et t_2 pour que $]-\infty, x_0[$ soit le plus grand des intervalles ouverts de la forme $]-\infty, \xi[$ sur lesquels la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = t_1 e^x + t_2 e^{-x}$ soit solution de (E*). On notera t_{x_0} une telle solution.

b. Soit $x_1 \in \mathbb{R}$; déterminer un système de conditions nécessaires et suffisantes vérifiées par les réels u_1 et u_2 pour que $]x_1, +\infty[$ soit le plus grand des intervalles ouverts de la forme $]\eta, +\infty[$ sur lesquels la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = u_1 e^x + u_2 e^{-x}$ soit solution de (E*). On notera u_{x_1} une telle solution.

c. Peut-on déterminer deux couples de réels (t^*_1, t^*_2) et (u^*_1, u^*_2) et un réel X tels que (E*) possède sur $\mathbb{R}$ une solution V définie par :

$$V(x) = \begin{cases} t^*_1 e^x + t^*_2 e^{-x} & \text{si } x \in]-\infty, X[\\ 0 & \text{si } x = X \\ u^*_1 e^x + u^*_2 e^{-x} & \text{si } x \in]X, +\infty[\ ? \end{cases}$$

Trouver une relation vérifiée par x_0 et x_1 $(x_1 > x_0)$ pour que (E*) possède sur $\mathbb{R}$ une solution dont la restriction à l'intervalle $]-\infty, x_0[$ soit la fonction t_{x_0} et la restriction à l'intervalle $]x_1, +\infty[$ soit la fonction u_{x_1}.

d. La fonction h définie en III. 1° est-elle unique ? Justifier la réponse donnée.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail